НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 10

6 УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. МЕТОДЫ ЛЯПУНОВА

Устойчивость относится к основным свойствам динамической системы, определяющим ее общую работоспособность. Мы уже рассматривали, что такое устойчивость. Напомним, что под устойчивостью понимают свойство системы самостоятельно возвращаться к равновесному состоянию после снятия возмущения, нарушившего ее равновесие.

Устойчивость линейных систем является внутренним свойством этих систем и не зависит от внешних воздействий. Поэтому для линейных систем данного определения достаточно.

Как мы уже говорили, устойчивость нелинейных систем, помимо свойств системы, зависит также от состояния системы и от характера ее внешних воздействий. Все это требует более подробного изучения концепций устойчивости нелинейных систем. Это следующие понятия: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, абсолютная устойчивость и некоторые другие.

Для исследования устойчивости нелинейных систем применяются первый и второй методы Ляпунова, а также ряд других подходов, построенных на основе методов Ляпунова. Это мы сейчас кратко рассмотрим. Материал непростой, поэтому для хорошего усвоения от студента здесь потребуются самостоятельные занятия.

6.1 Основные понятия. Первый метод Ляпунова

Рассмотрим сначала определение устойчивости по Ляпунову. Рассмотрим поведение динамической системы при отсутствии или постоянстве (что то же самое) внешних воздействий

$$\dot{x} = f(x) \ , \tag{6.1}$$

где x – вектор переменных состояния в фазовом пространстве;

f – некоторая вектор-функция.

Обозначим через $x^*(t)$ некоторый установившийся процесс системы (6.1). Этот процесс называется невозмущенным движением.

Таким образом, *установившийся процесс движения системы при отсутствии внешних воздействий называется невозмущенным движением*.

Теперь предположим, что внешние воздействия изменили начальное состояние системы $x(0)$. Это соответствует воздействию внешних факторов до нулевого времени и снятию этих воздействий в нулевой момент. То есть систему "сдвинули" в нулевой момент и затем предоставили самой себе. Движение системы после изменения ее начального состояния называется возмущенным движением.

Таким образом, свободное движение системы после изменения ее начального состояния называется возмущенным движением.

Обозначим возмущенное движение, как и в (6.1), через $x(t)$. Возмущенное движение в общем случае будет отличаться от невозмущенного. Обозначим это отклонение через $\tilde{x}$, то есть обозначим

$$\tilde{x} = x(t) - x^*(t) \ . \tag{6.2}$$

Тогда можно записать уравнение возмущенного движения для отклонения

$$\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) \ , \tag{6.3}$$

где F – некоторая вектор-функция. Невозмущенным движением для системы (6.3) будет $\tilde{x} = 0$.

Геометрически рассмотренные движения можно представить в n–мерном пространстве состояний с добавлением оси времени в виде некоторых интегральных кривых. Условно это можно изобразить так, как показано на рисунке 6.1. На рисунке применены другие обозначения, но суть от этого не меняется.

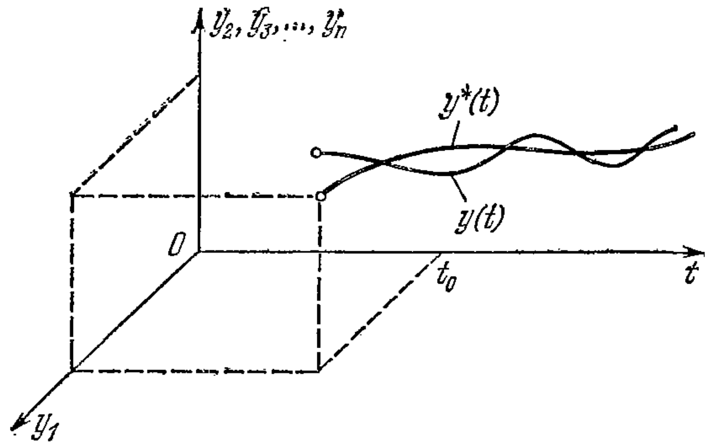

Рисунок 6.1 Невозмущенное $y^*(t)$ и возмущенное $y(t)$ движение системы

График отклонения возмущенного движения будет выглядеть так, как показано на рисунке 6.2. При этом невозмущенное движение для отклонения $\tilde{x} = 0$ (на рисунке 6.2 $x = 0$) изобразится прямой, совпадающей с осью времени. Другие построения на рисунке будут пояснены позже.

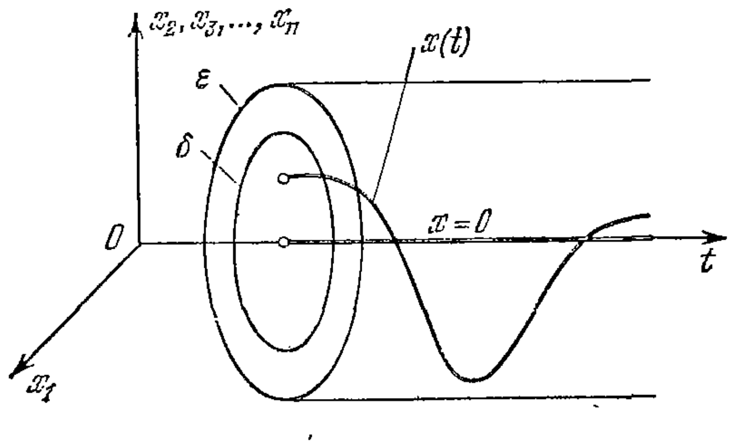

Рисунок 6.2 – Невозмущенное $x = 0$ и возмущенное $x(t)$ движение системы в отклонениях от невозмущенного режима

Теперь рассмотрим определение устойчивости по Ляпунову.

Невозмущенное движение системы $\tilde{x} = 0$ *называется устойчивым по Ляпунову, если при заданном* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$*, зависящее от* ε*, что при начальных условиях*

$$\left|\tilde{x}(t_0)\right| \langle \delta \qquad (6.4)$$

и всех t > 0 выполняется

$$\left|\tilde{x}(t, \tilde{x}_0)\right| \langle \varepsilon \ . \qquad (6.5)$$

Невозмущенное движение системы $\tilde{x}$ = 0 называется неустойчивым, если условие (6.5) не выполняется, хотя бы для одной координаты x.

Здесь знак $|\cdot|$ означает некоторую норму вектора, например, его длину.

Как это можно пояснить? Задаем на рисунке 6.2 некоторую "трубку" размером ε, в которую помещается наше возмущенное движение во времени, затем для этой трубки подбираем такую область начальных значений $\tilde{x}$ (t_0), при которой траектория системы находится в этой трубке. Эта область на рисунке 6.2 обозначена через *δ*. Если можно подобрать такую область начальных значений, то система устойчива, если нельзя, то система неустойчива по Ляпунову.

Если система устойчива по Ляпунову и, кроме того, со временем $\tilde{x} \to 0$, то невозмущенное движение системы $\tilde{x}$ = 0 называется асимптотически устойчивым. Это значит, что система асимптотически устойчива, если она возвращается к в исходное состояние, в котором была система до действия возмущения.

Таким образом, *невозмущенное движение системы называется асимптотически устойчивым, если система устойчива по Ляпунову и со временем $\tilde{x} \to 0$.*

Если система асимптотически устойчива при любых начальных значениях, она называется устойчивой в целом.

Таким образом, *если система асимптотически устойчива при любых начальных значениях, она называется устойчивой в целом.*

Система называется абсолютно устойчивой, если она асимптотически устойчива при любом характере нелинейности внутри определенного класса нелинейностей.

Ляпунов не только дал математическое понятие устойчивости, но и разработал два метода решения задачи устойчивости. Эти методы сформулированы им в виде теорем.

Рассмотрим коротко теоремы первого метода. Первый метод относится к исследованию устойчивости линеаризованных систем. Имеется в виду обычная линеаризация, то есть линеаризация гладких нелинейностей. Известно, что линеаризация производится относительно номинального режима. Этот режим и будет у нас невозмущенным движением.

Возникает вопрос: можно ли судить об асимптотической устойчивости невозмущенного движения нелинейной системы на основании исследования устойчивости ее линеаризованной модели? Впервые этот вопрос был поставлен и решен А.М. Ляпуновым в 1892 г. в его диссертационной работе в виде трех теорем.

Теоремы Ляпунова. 1. Если все корни характеристического уравнения линеаризованной модели левые, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной системы асимптотически устойчиво.

2. Если среди корней характеристического уравнения линеаризованной модели имеется правый корень, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной системы неустойчиво.

3. Случай, когда среди корней характеристического уравнения линеаризованной модели имеются нейтральные корни (корни на мнимой оси), но нет правых корней, называют критическим. В критическом случае по линеаризованной модели нельзя судить об устойчивости невозмущенного движения нелинейной системы.

6.2 Знакопостоянные и знакоопределенные функции

Во втором методе Ляпунова используются так называемые знакопостоянные и знакоопределенные функции. Познакомимся с этим функциями.

Рассмотрим гладкую функцию V(x), определенную в некоторой области фазового пространства системы, содержащей начало координат. Такая функция называется знакоопределенной, если она сохраняет один и тот же знак и обращается в нуль только в начале координат.

Таким образом, *функция называется знакоопределенной, если она гладкая, сохраняет один и тот же знак и обращается в нуль только в начале координат*.

Знакоопределенная функция может быть положительно определенной или отрицательно определенной.

Далее: *функция называется знакопостоянной, если она гладкая, сохраняет один и тот же знак и обращается в нуль в начале координат и в некоторых других точках*.

Следующий вид функций: *функции, не являющиеся знакопостоянными, называются знакопеременными*.

Пример знакоопределенной (положительно определенной) функции при n = 2

$$V = x_1^2 + x_2^2 \ . \tag{6.6}$$

Но если взять ту же функцию при n = 3, то она уже не будет знакоопределенной, Здесь она будет знакопостоянной, так как она будет равна нулю не только при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,но и при любом значении x_3, если $x_1 = x_2 = 0$.

Данный пример простой, но часто сразу нельзя определить какой является данная функция. Поэтому для ряда классов функций существуют методы определения их знакоопределенности, один из них мы сейчас рассмотрим.

6.3 Положительно определенные квадратичные формы

Для построения знакопостоянных функций широко используются квадратичные формы. Это математическая конструкция вида

$$V(x) = x^T Q x = \sum_{i.k=1}^{n} q_{ik} x_i x_k \, , \tag{6.7}$$

где x^T – вектор, транспонированный по отношению к вектору-столбцу x ;

Q –матрица коэффициентов;

n – размерность вектора x.

В средней части (6.7) показано представление квадратичной формы через произведение матриц в виде $x^T Q x$, справа – в виде полинома. Как видно, это полином второго порядка для всех возможных произведений составляющих вектора x. Заметим, что в результате произведения матриц в (6.7) получается скалярная функция. Далее заметим, что количество коэффициентов квадратичной формы через произведение матриц больше этого количества формы в виде полинома (в этом мы убедимся позже на примере). То есть часть коэффициентов Q можно задавать произвольно. Это используется для того, чтобы придать квадратичной форме наиболее простой вид. Считается, что лучше всего задать свободные коэффициенты так, чтобы матрица Q стала симметрической.

Некоторые напоминания по поводу действий с матрицами. Транспонирование матрицы заключается в замене ее строк столбцами. Далее, умножать можно матрицы, у которых число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго сомножителя. Умножение матриц не перестановочно, то есть их нельзя менять метами. Произведение матриц $A\ (m \times n)$ и $B\ (n \times p)$ равно матрице $C\ (m \times p)$ и вычисляется по формуле

$$C = AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right] = \left[c_{ij} \right] \tag{6.8}$$

Тогда из (6.7) ясно, что матрица Q должна быть квадратной, размером n.

Симметрической (симметричной) называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны между собой. Для такой матрицы $q_{ik} = q_{ki}$.

Мы рассматриваем квадратичную форму (6.7), как функцию от x. Тогда нам нужно выяснить, при каких условиях эта функция будет положительно определенной. Такие условия дает нам критерий Сильвестра. Что это такое?

Критерий Сильвестра. *Для того, чтобы квадратичная форма* $V(x) = x^T Q x$ *была положительно определенной функцией, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы ее коэффициентов Q были положительными.*

Под главным диагональным минором матрицы понимается определитель k-го порядка, составленный из элементов, расположенных на пересечении первых k строк и k столбцов этой матрицы.

Из изложенного следует методика применения критерия Сильвестра для выявления положительной определенности квадратичной формы, заданной в виде в виде полинома:

а) записать в развернутом виде x^TQx, причем порядок x равен порядку полинома;

б) выполнить умножение матриц x^TQx и привести подобные, в итоге получится квадратичная форма в виде полинома с неопределенными коэффициентами матрицы Q;

в) приравнивая коэффициенты соответствующих слагаемых полученного и заданного полиномов, найти элементы матрицы Q. Свободные элементы принимаем такими, чтобы матрица Q стала симметричной;

г) найти главные диагональные миноры матрицы Q и выявить их знак. Если они все положительные, то заданная квадратичная форма положительно определенная, если хотя бы один минор нулевой или отрицательный, то заданная форма не является положительно определенной.

<u>Пример 1</u>: выяснить, является ли функция от двух переменных

$$V = 5x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2 \tag{6.9}$$

положительно определенной.

<u>Решение</u>. Можно ли сразу решить задачу? Оказывается, можно. Из (6.9) следует, что при нулевом векторе x V не равно нулю. Это значит, что одно условие положительной определенности не выполнено и функция (6.9) не является положительно определенной.

<u>Пример 2</u>: теперь возьмем ту же задачу, но без двойки в правой части.

$$V = 5x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 \ . \tag{6.10}$$

Эта функция является квадратичной формой.

Решение. Здесь при нулевом векторе x V равно нулю и первое условие выполнено. Для решения нужно составить матрицу Q в общем виде, затем вычислить квадратичную форму опять же в общем виде и путем приравнивания соответствующих коэффициентов найти элементы матрицы Q. У нас по заданию функция от двух переменных. Тогда запишем (действия а и б методики)

$$V(x) = x^T Q x = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} q_{12} \\ q_{21} q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_{11} x_1^2 + (q_{21} + q_{12}) x_1 x_2 + q_{22} x_2^2 . \quad (6.11)$$

в) Приравнивая соответствующие коэффициенты в (6.9) и (6.10), получаем

$$q_{11} = 5; q_{22} = 2; q_{12} + q_{22} = -2 . \quad (6.12)$$

То есть один из коэффициентов задается произвольно. Примем для симметрии Q $q_{12} = -1$, тогда $q_{21} = -1$.

г) Составляем матрицу Q

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} q_{12} \\ q_{21} q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (6.13)$$

и находим ее главные диагональные миноры. Ясно, что их будет два

$$\Delta_1 = 5 > 0 ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 9 > 0 . \quad (6.14)$$

Таким образом, данная квадратичная форма положительно определенная.

Конец решения

Заметим, что из Примера 2 следует, что данная методика позволяет определить границы положительной определенности в зависимости от параметров, то есть выполнить параметрический синтез системы.